Начнем с приема, который отличается от приема Диофанта, но благодаря которому индусы умели получать неограниченное число рациональных решений; для этого составим сперва уравнения:

$$\left.\begin{aligned} ax_1^2 + b_1 = y_1^2, \\ ax_2^2 + b_2 = y_2^2, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где для определения b_1 и b_2 берут произвольные x_1, y_1, x_2 и y_2. Если мы решим эти уравнения относительно b_1 и b_2, то произведение этих двух количеств можно написать в виде:

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2.$$

Это дает нам третье уравнение

$$\left.\begin{aligned} &ax_3^2 + b_3 = y_3^2, \\ \text{где}\quad & \\ &b_3 = b_1b_2,\ x_3 = x_1y_2 + x_2y_1, \\ &y_3 = ax_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Тождественно приравнивая оба уравнения (3), получаем:

$$a(2x_1y_1)^2 + b^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

или

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\right)^2. \qquad (5)$$

Таким образом мы имеем рациональное решение уравнения (2); если продолжать подставлять произвольные значения на место x_1 и y_1, то нередко удается получать целочисленные значения x и y. Следует, в частности, отметить случаи, когда удается получить уже, что $b = \pm 1$ или ± 2.

Если $b = 1$, то можно, поступая таким образом, получить из одного какого-нибудь решения уравнения (2) новое решение и затем сколько угодно решений; если $b = -1$ или ± 2, то (5) дает, в свою очередь, целочисленное решение уравнения (2), ибо из $y_1^2 = ax_1^2 \pm 2$ можно вывести, что $ax_1^2 + y_1^2 = 2ax_1^2 \pm 2$, т. е. равно четному числу. В то же время знание одного решения (2) дает возможность благодаря (4) получить из одного решения (1) неограниченное количество решений.

Если, однако, для некоторого данного значения a последовательные пробы не приводят к уравнению вида (1), для которого b равно ± 1 или ± 2, то прибегают к так называемому *циклическому* методу для приведения значения b. Пусть, например, дано уравнение:

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2,$$

в котором b уже настолько мало, насколько этого удалось добиться с помощью проб, заключающихся, скажем, в том, чтобы приписать $\frac{y_1}{x_1}$ приближенное значение $\sqrt{a}$; x_1 и b_1 в этом случае первые между собой, ибо, имей они общего множителя, такой множитель был бы на обеих сторонах заданного уравнения квад-